Musterlösung 5

1. Sei A_i, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, das Ereignis, dass der Spieler A genau i Asse hat. Beachten Sie, dass diese Ereignisse disjunkt sind. Für alle $i = 0, \ldots, 4$ gilt

$$P(A_i) = \frac{\binom{4}{i}\binom{52-4}{13-i}}{\binom{52}{13}}.$$

a) Die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit ist somit

$$P(A_2 \cup A_3 \cup A_4 | A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \frac{P((A_2 \cup A_3 \cup A_4) \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4))}{P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)} =$$
$$= \frac{P(A_2 \cup A_3 \cup A_4)}{P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)} = \frac{1 - P(A_0) - P(A_1)}{1 - P(A_0)} = \frac{5359}{14498} = 0.369637.$$

b) Sei H das Ereignis, dass der Spieler A das Herz Ass hat. Offensichtlich ist $P(H) = \frac{1}{4}$, denn einer der vier Spieler muss das Herz Ass haben, wobei alle gleichberechtigt sind. Selbes Resultat erhält man auch durch zählen. Für $i = 1, 2, 3, 4$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Spieler A genau i Asse hat, wovon eines das Herz Ass ist, gleich

$$P(A_i \cap H) = \frac{\binom{3}{i-1}\binom{52-4}{13-i}}{\binom{52}{13}}.$$

Somit ist die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit gleich

$$P(A_2 \cup A_3 \cup A_4 | H) = \frac{P((A_2 \cup A_3 \cup A_4) \cap H)}{P(H)} =$$
$$= \frac{P(A_2 \cap H) + P(A_3 \cap H) + P(A_4 \cap H)}{P(H)} = \frac{11686}{20825} = 0.561152,$$

wobei wir in der zweiten Gleichung verwendet haben, dass die Mengen $A_i \cap H$ disjunkt sind.

2. Wir definieren für $i = 1, 2, 3$ die (paarweise unabhängigen) Ereignisse K_i = „Der Patient p hat Krankheit k_i“. Sei $\mathrm{T}_{+,-}$ das Ereignis, dass der erste Test positiv war und der zweite Test negativ. Analog definieren wir $T_{+,+}$, $T_{-,+}$, und $T_{-,-}$.

a) Wir erhalten

$$P(K_1) = \frac{3'215}{10'000} = 0.3215, \quad P(K_2) = \frac{2'125}{10'000} = 0.2125, \quad P(K_3) = \frac{4'660}{10'000} = 0.466.$$

Bitte wenden!

b) Mit der Formel von Bayes erhalten wir

$$\begin{aligned}
P(K_3 \mid T_{+,+}) &= \frac{P(T_{+,+} \mid K_3)P(K_3)}{P(T_{+,+})} \\
&= \frac{P(T_{+,+} \mid K_3)P(K_3)}{P(T_{+,+} \mid K_1)P(K_1) + P(T_{+,+} \mid K_2)P(K_2) + P(T_{+,+} \mid K_3)P(K_3)} \\
&= \frac{\frac{510}{4'660} \cdot 0.466}{\frac{2'110}{3'215} \cdot 0.3215 + \frac{396}{2'125} \cdot 0.2125 + \frac{510}{4'660} \cdot 0.466} \approx 0.17,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(K_3 \mid T_{-,-}) &= \frac{P(T_{-,-} \mid K_3)P(K_3)}{P(T_{-,-})} \\
&= \frac{P(T_{-,-} \mid K_3)P(K_3)}{P(T_{-,-} \mid K_1)P(K_1) + P(T_{-,-} \mid K_2)P(K_2) + P(T_{-,-} \mid K_3)P(K_3)} \\
&= \frac{\frac{509}{4'660} \cdot 0.466}{\frac{100}{3'215} \cdot 0.3215 + \frac{410}{2'125} \cdot 0.2125 + \frac{509}{4'660} \cdot 0.466} \approx 0.50.
\end{aligned}$$

3. Wir definieren das Ereignis $A_{10} =$ „Die aus der Brieftasche A gezogene Note ist eine Zehnernote“. Analog definieren wir A_{50}, B_{10}, B_{50}.

a) Mit der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit erhalten wir

$$P(B_{10}) = P(B_{10} \mid A_{10})P(A_{10}) + P(B_{10} \mid A_{50})P(A_{50}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{9}.$$

b) Mit der Formel von Bayes und dem Resultat aus a) erhalten wir

$$P(A_{10} \mid B_{10}) = \frac{P(B_{10} \mid A_{10})P(A_{10})}{P(B_{10})} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{6}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{2}.$$

c) Analog erhalten wir

$$P(A_{50} \mid B_{50}) = \frac{P(B_{50} \mid A_{50})P(A_{50})}{P(B_{50})} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{6}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{4}{5}.$$